数理解析研究所講究録
961巻 1996年 36-52

原始的cusp形式に付随するゼータ関数の値分布について

名古屋大学大学院多元数理
科学研究科　　松本 耕二
(KOHJI MATSUMOTO)

本稿の主目的は，宇都宮大学の服部哲弥氏との共著論文[2]で得られた結果を紹介することであるが，話の見通しを良くするため，まずRiemannゼータ関数の場合のD. Joynerの仕事の解説から始めよう。以下，μ_N はN次元Lebesgue測度を表わすものとする。

Rを，辺が座標軸に平行な，複素平面$\mathbb{C}$内の勝手な長方形とし，$\zeta(s)$ $(s=\sigma+it\in\mathbb{C})$ をRiemannゼータ関数，$\sigma>\frac{1}{2}$ に対し

$$V(T,R,\sigma;\zeta)=\mu_1\{t\in[-T,T]\mid \log\zeta(\sigma+it)\in R\}$$

とおく。Bohr-Jessen[1]は，極限値

$$W(R,\sigma;\zeta)=\lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}V(T,R,\sigma;\zeta)$$

の存在を証明した。この値は，$\mathrm{Re}\, s=\sigma$ なる線上で $\log\zeta(s)$ がR内に値をとる"確率"と見ることができるので，その定量

的評価は興味深い問題である。話を単純にするため，原点を中心とする正方形

$$R(\ell)=\{z\in\mathbb{C}\mid -\ell\leq \mathrm{Re}\,z\leq\ell,\ -\ell\leq \mathrm{Im}\,z\leq \ell\}\quad(\ell>0)$$

に考察を限定し，$W(R(\ell),\sigma;\zeta)$ の $\ell\to\infty$ の時の挙動を調べる。まず $\sigma>1$ なら $\log\zeta(\sigma+it)$ は $\mathrm{Re}\,s=\sigma$ 上で有界であり，従って十分大きい ℓ に対し $W(R(\ell),\sigma;\zeta)=1$ となってしまい，面白味はない。しかし $\frac{1}{2}<\sigma\leqq 1$ だと，$\lim_{\ell\to\infty}W(R(\ell),\sigma;\zeta)=1$ ではあるが有限の ℓ で極限値1に到達はしないので，その差

$$\widetilde{W}(\ell,\sigma;\zeta)=1-W(R(\ell),\sigma;\zeta)$$

を評価するという問題が設定できる。この $\widetilde{W}$ の評価については，Jessen-Wintner [4] による，$\frac{1}{2}<\sigma\leqq 1$ と $\forall\lambda>0$ に対し

$$\widetilde{W}(\ell,\sigma;\zeta)\leqq C(\lambda,\sigma)e^{-\lambda\ell^2}$$

が成り立つ（$C(\lambda,\sigma)$ は λ，σ のみによって定まる正定数），という結果が長らく唯一のものであったが，1986年になって Joyner [5] が次の不等式を証明した。即ち $\frac{1}{2}<\sigma<1$ に対し

$$(1)\quad \begin{aligned}&2^{-39}\exp\{-c_1(\sigma)\ell^{\frac{1}{1-\sigma}}(\log\ell)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(1+o(1))\}\\ &\leqq \widetilde{W}(\ell,\sigma;\zeta)\leqq 4\exp\{-c_2(\sigma)\ell^{\frac{1}{1-\sigma}}(\log\ell)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(1+o(1))\}\end{aligned}$$

であり，さらに $c_1(\sigma)$，$c_2(\sigma)$ も具体的に書き下すことができる，というものである。これによって $\widetilde{W}(\ell,\sigma;\zeta)$ の $\ell\to\infty$ の時の漸近的な大きさは，定数因子を除いて決定されたことになる。なお Joyner は $\sigma=1$ の場合には触れていないが，彼の

方法により，

$$(2)\quad \begin{aligned} &2^{-39}\exp\{-100\exp\exp(2\ell(1+o(1)))\}\\ &\leqq \widetilde{W}(\ell,1;\zeta)\leqq 4\exp\{-\tfrac{3}{4}\exp\exp(\tfrac{1}{2}\ell(1+o(1)))\}\end{aligned}$$

を得ることができる([9])。

n番目の素数をp_nと書くと，Euler積表示により，$\sigma>1$では

$$\log\zeta(\sigma+it)=-\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-p_n^{-\sigma-it})=-\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-p_n^{-\sigma}e^{-it\log p_n})$$

なので，これは有限で切った和 $-\sum_{n\leqq N}\log(1-p_n^{-\sigma}e^{-it\log p_n})$ で近似できる。そこでBohr - Jessenは，$\theta_n\in[0,1)$ $(n=1,2,\cdots,N)$ に対して定まる写像

$$S_N(\theta_1,\cdots,\theta_N)=-\sum_{n\leqq N}\log(1-p_n^{-\sigma}e^{2\pi i\theta_n})$$

を考え，$\sigma>1$ の時のみならず $\frac{1}{2}<\sigma\leqq 1$ の場合にも，

$$W(R,\sigma;\zeta)=\lim_{N\to\infty}\mu_N\{(\theta_1,\cdots,\theta_N)\in[0,1)^N \mid S_N(\theta_1,\cdots,\theta_N)\in R\}$$

であることを証明した。このことがBohr - Jessenによる，$W(R,\sigma;\zeta)$ の存在定理の，実質的な内容となっている。そこで $\widetilde{W}(\ell,\sigma;\zeta)$ の大きさを考えることは，

$$S_N(\theta_1,\cdots,\theta_N)\in\mathbb{C}-R(\ell)$$

なる$(\theta_1,\cdots,\theta_N)$がどのくらいあるか，という問題に帰着するが，$\log(1-p_n^{-\sigma}e^{2\pi i\theta_n})$ をTaylor展開して２乗以上の項を無視すれば，$S_N(\theta_1,\cdots,\theta_N)$ はおおよそ

$$\sum_{n\leqq N}p_n^{-\sigma}e^{2\pi i\theta_n}=\sum_{n\leqq N}p_n^{-\sigma}\cos(2\pi\theta_n)+i\sum_{n\leqq N}p_n^{-\sigma}\sin(2\pi\theta_n)$$

に近いと思ってよい。このことと，包含関係

$$\{(\theta_1,\dots,\theta_n) \mid |\mathrm{Re}\, S_N(\theta_1,\dots,\theta_N)|>l\} \cup \{(\theta_1,\dots,\theta_n) \mid |\mathrm{Im}\, S_N(\theta_1,\dots,\theta_N)|>l\}$$
$$\supset \{(\theta_1,\dots,\theta_N) \mid S_N(\theta_1,\dots,\theta_N) \in \mathbb{C}-R(l)\}$$
$$\supset \{(\theta_1,\dots,\theta_N) \mid |\mathrm{Re}\, S_N(\theta_1,\dots,\theta_N)|>l\}$$

に注意すると，結局

$$\mu_N\Bigl(\Bigl\{(\theta_1,\dots,\theta_N) \Bigm| \Bigl|\sum_{n\le N} p_n^{-\sigma}\cos(2\pi\theta_n)\Bigr|>l\Bigr\}\Bigr)$$

（及び cos を sin でおきかえたもの）の，$N\to\infty$ のときの大きさを知りたい，ということになる。こうして Joyner は，次の Montgomery の補題が，$\widetilde{W}(l,\sigma;\zeta)$ の量的評価に有効であることに気づいた。

$\bar{\gamma}=\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非負実数列で，無限に多くの n について $\gamma_n>0$ であり，かつ

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^2<\infty$$

を満たすものとする。$\Omega=[0,1)^{\infty}$ から実数全体 $\mathbb{R}$ への写像 X を，

$$\Omega \ni \theta=(\theta_1,\theta_2,\dots) \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\cos(2\pi\theta_n)\in\mathbb{R}$$

で定める。条件(3)と Kolmogorov の定理により，この X は μ_1 の無限直積として与えられる Ω 上の測度 P に関して almost everywhere で収束するので，その意味で $P\{|X|\ge l\}$ といった量を考えることができる。自然数 N に対し

$$A_N(\bar{\gamma})=\sum_{n=N+1}^{\infty}\gamma_n^2, \qquad B_N(\bar{\gamma})=\sum_{n\le N}\gamma_n$$

とする。この時，

<u>補題</u>（Montgomery [12]）．

(i) $P\{X \geqq 2B_N(\bar{r})\} \leqq \exp\{-\frac{3}{4}B_N(\bar{r})^2 A_N(\bar{r})^{-1}\}$

(ii) $\bar{r} = \{r_n\}$ が単調減少列なら，

$$P\{X \geqq \tfrac{1}{2}B_N(\bar{r})\} \geqq 2^{-40}\exp\{-100\,B_N(\bar{r})^2 A_N(\bar{r})^{-1}\}.$$

Riemannゼータの場合には $r_n = p_n^{-\sigma}$ ととれば，(ii)の単調性の仮定も満たされ，上の補題によって $\tilde{W}(\ell, \sigma; \xi)$ を上下から，

$$\exp\{-(\text{constant})(\sum_{n\leq N} p_n^{-\sigma})^2(\sum_{n=N+1}^{\infty} p_n^{-2\sigma})^{-1}\}$$

の形の量で評価することができる。最後にこの量の中にある和を素数定理を用いて計算してやれば，Joynerの不等式(1)（及び(2)）を導出することができる。

さて，写像 $S_N(\theta_1, \cdots, \theta_N)$ は $-\log(1-p_n^{-\sigma}e^{2\pi i\theta_n})$ たちの和であったが，この各項は θ_n が0から1まで動くとき $\mathbb{C}$ 内の凸の閉曲線を描く。Bohr-Jessenの証明ではこの凸性が議論の重要な鍵となっている。Jessen-Wintner[4]による存在定理の別証明も凸性を用いるものである。一般にこのような意味での凸性を持つEuler積を筆者はconvexなEuler積と名づけた（Joynerは同じ性質をlinearと呼んでいる）が，これは一般のEuler積に対して成立する性質ではもちろんないので，

Bohr-Jessen 理論はこの性質をもつ，かなり限定されたEuler積にしか通用しないという弱点をもっていた。例えばDirichletのL関数はconvexであるので，Joynerは彼の本の p. 141 で「我々は残念なことにlinearなEuler因子をもつ場合に話を限定せねばならない。それは，linearな場合にしか証明されていないBohr，Jessen，Wintnerの結果を用いるためである。」と述べてから，彼の不等式をRiemannゼータとDirichlet Lの場合に証明しているのである。

Convex（= Joyner のいう linear）でないEuler積に通用する存在定理のはじめての証明は，筆者が1988年の日仏解析数論シンポジウムで公表したものである。論文としては[7][8][10]があるが，[10]ではnon-convexな場合に通用する第二の証明法が，Dedekindゼータに例をとって述べてある。最も一般的な形で議論を展開してあるのは[8]であり，そこでは相当に一般のEuler積をもつゼータ関数φに対して，Bohr-Jessen型の極限値$W(R, \sigma; \varphi)$の存在が証明されている。（この種のゼータをLaurinčikasはMatsumotoゼータと呼んでいる。）こうして存在定理が一般に得られた以上，定量的結果としてのJoynerの不等式をも一般の場合に拡張しようというのは自然な発想である。筆者はまず[9]において，DedekindゼータへのJoyner型不等式の拡張を論じた。（Dedekindゼー

タ $\zeta_F(s)$ は，F が $\mathbb{Q}$ 上 Galois 拡大なら convex な Euler 積をもつが，non-Galois だとそうとは限らない。）研究会での公表は1989年の京大数理研と，同年の Amalfi（イタリア）での国際研究集会(*)である。

まず F が $\mathbb{Q}$ 上 Galois で，$\nu=[F:\mathbb{Q}]\geqq 2$ とする。素数 p_n の F での素因子を $\mathfrak{p}_n^{(1)},\cdots,\mathfrak{p}_n^{(g(n))}$ とし，そのノルムを

$$N\mathfrak{p}_n^{(j)}=p_n^{f(n)}\quad(1\leqq j\leqq g(n))$$

とすると，

$$\zeta_F(s)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-f(n)s})^{-g(n)}$$

と書ける。p_n の2乗以上の項は Riemann ゼータの時と同様に無視できるので，この場合の r_n としては

$$r_n=\begin{cases} g(n)\cdot p_n^{-\sigma} & \text{if}\quad f(n)=1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

とすればよい。p_n の分岐指数を $e(n)$ とすると $e(n)f(n)g(n)=\nu$ で，$e(n)>1$ なる有限個の n（判別定理）を除外すると $f(n)g(n)=\nu$，よって $f(n)=1$ なら $g(n)=\nu$ である。従ってこの時 $r_n=\nu\cdot p_n^{-\sigma}$ であり，これは単調減少列である。有限個

(*) この会には Joyner もきていた。彼とは昼食のテーブルを共にして話をしたりもしていたのだが，その時には誰だかわからず，筆者の講演の後で（多分彼の結果を nice result と言ったので気を良くして）握手を求めてきて，はじめて Joyner だとわかったのである。帰りに，偶然パリへの同じ便を予約していることがわかると，彼は乗務員と交渉して，予約していた席を筆者のとなりの席に代えてもらった。ところが彼は，となりに座ってニヤリと笑うと，いきなり寝てしまい，そのままパリまでずっと寝ていて，何の会話もなされなかった。パリで別れて以来，彼とは会っていない。

の例外は無害であることが容易にわかるので，この場合もMontgomeryの補題が使える。さらに素イデアル定理によって

$$\{p_n \leqq x \mid g(n)=\nu\} \sim \frac{1}{\nu}\cdot\frac{x}{\log x}$$

である（例えばHeilbronn [3] を見よ）から，Joyner型の不等式を導くことができる。結果は，$1-\nu^{-1}<\sigma<1$ において

$$\begin{aligned}(4)\qquad & 2^{-39}\exp\{-c_1(\sigma)\nu^{-1}\ell^{\frac{1}{1-\sigma}}(\log\ell)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(1+o(1))\}\\ &\leqq \tilde{W}(\ell,\sigma;\zeta_F)\leqq 4\exp\{-c_2(\sigma)\nu^{-1}\ell^{\frac{1}{1-\sigma}}(\log\ell)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(1+o(1))\}\end{aligned}$$

というものである（$\sigma=1$でも結果が出せるが省略）。

Fがnon-Galoisの場合には，そのままでは単調減少列にならないので，FのGalois closureに持ち上げてGalois拡大の場合に帰着させるという議論をする。こうしてnon-Galoisでも，少し弱くなるが$\tilde{W}(\ell,\sigma;\zeta_F)$の上下からの不等式を証明することができる。詳細は[9]を御覧いただきたい。また，このあたりまでの結果については，[6]にも日本語による解説がある。

さらに他の種類のゼータに対しても，Joyner型の不等式を証明することは可能であろうか。上からの評価については，Montgomeryの補題の(i)により直ちに，$\exp\{-\frac{3}{4}B_N(\bar{r})^2A_N(\bar{r})^{-1}\}$の計算に帰する。この$B_N(\bar{r})$，$A_N(\bar{r})$は個々のゼータ関数に応じて定まるある種の係数和であるが，今までの例で用いた

素数定理や素イデアル定理のような，係数和に対する「素数定理型の不等式」さえあれば，上からの評価を完全に explicit に書きくだすことができる。このあたりの事情は最も一般の形で[11]において解明されている。従ってこの意味において，上からの評価に対しては Montgomery の補題は十分な道具を提供していると言うことができる。

しかし下からの評価については状況は全く異なる。Montgomery の補題の(ii)の前提条件である$\{r_n\}$の単調性の仮定は，Riemann ゼータでは問題にならなかったし，Dedekind ゼータの場合もなんとかクリアできた。しかしより一般のゼータに対して，この仮定が満たされることはもはや期待できない。一例として，$SL(2,\mathbb{Z})$に関する weight m の原始的 cusp 形式 f を考えよう。即ち Fourier 展開を $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)e^{2\pi inz}$ とすると，$c(0)=0$，$c(1)=1$，かつ $f(z)$ はすべての Hecke 作用素の同時固有関数になっているものとする。このとき，f に付随するゼータ関数 $\phi_f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}c(n)n^{-s}$ は

$$\phi_f(s)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n p_n^{-s})^{-1}(1-\beta_n p_n^{-s})^{-1},\quad \alpha_n+\beta_n=c(p_n)$$

なる Euler 積表示をもち，[8]の一般論によって，$\sigma>m/2$ で極限値 $W(R,\sigma;\phi_f)$ が存在する。これに対して，Montgomery の補題を用いて Joyner 型不等式を示そうとすると，補題の r_n として $r_n=|c(p_n)|p_n^{-\sigma}$ をとらねばならないことがわかる。

$f(z)$ の Fourier 係数の挙動は大変複雑であるので，この $\{r_n\}$ に対して単調性は望むべくもない．こうして Montgomery の補題の(ii)によって下からの評価を得ようとする試みは失敗するのである．

そこで，Montgomery の補題に代わるものはないか，と考えを進めることになるが，少し落ち着いてよく考えてみると，Montgomery の補題の要請である $\{r_n\}$ の単調減少性という仮定は，いかにも厳しすぎるのである。即ち，補題の結論の式は $A_N(\bar{r})$ や $B_N(\bar{r})$ といった係数和，いいかえれば係数たちのある種の平均値のみで述べられているのに，その結論を出すために，個々の係数に関する大変厳しい条件である単調性まで仮定するのは不必要なのではないか？　いずれにしろ単調性というのはひとつの十分条件にすぎないのだから，もっと弱い形の，係数和の言葉のみで書かれるような成立条件があるのではなかろうか？　このように推論することはそれほど無理なことでもあるまい。そして実際我々は，次のような形の，Montgomery 型の不等式が成立するための必要十分条件を与えることができる．数列 $\bar{r}=\{r_n\}$ を単調減少列にならべかえたものを $\bar{\rho}=\{\rho_n\}$ とする．(3) により $r_n \to 0$ ($n\to\infty$ のとき) だから，このならべかえは well-defined である．また自然数 N_1, N_2 と $\delta>0$

に対し

$$f_{\bar{r},\bar{p}}(N_1, N_2\,;\,q) = \frac{B_{N_2}(\bar{p})}{B_{N_1}(\bar{r})} + q\cdot\frac{A_{N_2}(\bar{p})}{A_{N_1}(\bar{r})}$$

とおく。このとき,

定理1（Hattori-Matsumoto[2]）

(i) 次の二つの条件は同値である。

a) 自然数 N_0 と正数 c_1, c_2, c_3 が存在して,

(5) $$P\{X \geqq c_1 B_N(\bar{r})\} \geqq c_2 \exp\{-c_3 B_N(\bar{r})^2 A_N(\bar{r})^{-1}\}$$

がすべての $N \geqq N_0$ に対して成り立つ。

b) 正数 q, 自然数 N_0' と, q によって定まる正数 u_q が存在して,

(6) $$f_{\bar{r},\bar{p}}(N_1, N_2\,;\,q) \geqq u_q$$

がすべての $N_1, N_2 \geqq N_0'$ に対して成り立つ。

(ii) 不等式(6)があるひとつの $q>0$ について成り立てば, 任意の $q>0$ に対しても成り立つ（もちろん u_q は q に応じて変わる）。

(iii) 不等式(6)が成立している時, c_1, c_2, c_3 は q と u_q とを用いて explicit に書ける。

[注意] (3)をみたすすべての数列 $\bar{r} = \{r_n\}$ が上の定理の条件を満たすわけではない。例えば $\tau_k = \sigma_k = k^{-1}$ として,

$$\{r_n\} = \tau_1, \sigma_1, \tau_2, \sigma_2, \tau_3, \tau_4, \sigma_3, \tau_5, \tau_6, \tau_7, \tau_8, \sigma_4, \tau_9, \cdots \cdots, \tau_{16}, \sigma_5, \tau_{17}, \cdots\cdots$$

は(6)を満たさないことが検証できる。

上の定理の証明は省略するが，一言だけ述べておくと，

$$X : \Omega \ni \theta \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(2\pi\theta_n) \in \mathbb{R}$$

を確率変数とみて，期待値 $E[e^{\lambda X}] = \prod_{n=1}^{\infty} E[e^{\lambda r_n \cos(2\pi\theta_n)}]$ $(\lambda > 0)$ を計算するのであるが，この個々の因子

$$E[e^{\lambda r_n \cos(2\pi\theta_n)}] = \int_0^1 e^{\lambda r_n \cos(2\pi\theta_n)} d\theta_n$$

は modified Bessel 関数 $I_0(\lambda r_n)$ の積分表示であって，その級数表示は

$$I_0(\lambda r_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\lambda r_n}{2}\right)^{2n}$$

である。これらの表示から $E[e^{\lambda r_n \cos(2\pi\theta_n)}]$ の上下からの評価式が得られ，それらが証明中で重要な役割を果たす。

さて，我々の当面の目標である，原始的cusp形式 f に付随するゼータ Φ_f の場合に使いやすいように，この定理を特殊化して次の結果を得る。

<u>定理2</u>（Hattori-Matsumoto[2]）正数 κ, C_4, C_5, C_6（ただし $\kappa \leqq 1$）が存在して，

（I） $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $r_n \leqq C_4 p_n^{-\kappa}$,

(II) $\#\{n\le x \mid r_n \ge C_5 p_n^{-\kappa}\} > C_6 x$

を満たすとする（#S は集合 S の元の個数を表わす）。このとき (5) 式が成り立つ。

証明は，(I), (II) を用いて (6) が成立していることを示し，定理 1 に帰着させるのであって，さほど困難なものではないが省略する。原論文 [2] を参照されたい。

なお，定理 2 は本当に定理 1 の「特殊な場合」にすぎないことを注意しておく。実際，

$$\{r_n\} = 1,\ \tfrac{1}{2},\ e^{-3},\ \tfrac{1}{3},\ e^{-5},\ e^{-6},\ e^{-7},\ \tfrac{1}{4},\ e^{-9},\ \cdots,\ e^{-15},\ \tfrac{1}{5},\ e^{-17},\ \cdots,\ e^{-31},\ \tfrac{1}{6},\ e^{-33},\ \cdots\cdots$$

は定理 2 の (I), (II) のどちらをも満たさないが，定理 1 の (6) は満たしていることがわかる。

原始的 cusp 形式のゼータ $\varphi_f(s)$ を扱う場合には，既に述べたように $r_n = |c(p_n)|\,p_n^{-\sigma}$ ととることになる。この時，帯領域 $\frac{m}{2} < \sigma \le \frac{m+1}{2}$ において，$\kappa = \sigma - \frac{m-1}{2}$，$C_4 = 2$，$C_5 = \sqrt{2} - \varepsilon$（$\varepsilon$ は任意に小さい正の数）とある $C_6 = C_6(\varepsilon)$ に対して定理 2 の条件 (I), (II) が成立する。実際，(I) は Deligne による有名な結果（Ramanujan - Petersson 予想）そのものであり，(II) は Ram Murty [13] の結果である。従って定理 2 によって不等

式(5)が成り立つので，Joynerの時と同様の論法によって

$$\widetilde{W}(\ell,\sigma;\Phi_f) \geqq 2C_2 \exp\{-C_3 B_N(\bar{r})^2 A_N(\bar{r})^{-1}\}$$

を得る。この右辺をさらに計算するために必要な，Fourier係数に関する「素数定理型の不等式」は，Rankin[14]によって示されている。それは，$a(p_n)=c(p_n)p_n^{\frac{1-m}{2}}$として，

$$(7)\qquad \sum_{p_n\leq x}|a(p_n)|^2=\frac{x}{\log x}(1+o(1)),$$

$$(8)\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\log x}(1+o(1))\leq \sum_{p_n\leq x}|a(p_n)|\leq \frac{2+3\sqrt{6}}{10}\frac{x}{\log x}(1+o(1))$$

というものである。また$\widetilde{W}(\ell,\sigma;\Phi_f)$の上からの評価の方はMontgomeryの補題の(i)と，上記Rankinの(7)(8)によって計算できる。こうして我々は次のような，$\Phi_f(s)$に対するJoyner型不等式を証明することができる：

<u>定理3.</u>　正定数α_1，$\alpha_2=\alpha_2(m,\sigma,f)$，$\alpha_3=\alpha_m(m,\sigma)$，$\alpha_4=\alpha_4(f)$，$\alpha_5$が存在して，$\frac{m}{2}<\sigma<\frac{m+1}{2}$に対して

$$\begin{aligned}&\alpha_1\exp\{-\alpha_2\ell^{2/(m+1-2\sigma)}(\log\ell)^{(2\sigma-m+1)/(m+1-2\sigma)}(1+o(1))\}\\ &\leqq \widetilde{W}(\ell,\sigma;\Phi_f)\\ &\leqq 4\exp\{-\alpha_3\ell^{2/(m+1-2\sigma)}(\log\ell)^{(2\sigma-m+1)/(m+1-2\sigma)}(1+o(1))\},\end{aligned}$$

また$\sigma=\frac{m+1}{2}$において

$$\begin{aligned}\alpha_1\exp\{-\alpha_4\exp\exp(\alpha_5\ell(1+o(1)))\}&\leqq \widetilde{W}(\ell,\tfrac{m+1}{2};\Phi_f)\\ &\leq 4\exp\{-\tfrac{3}{8}\exp\exp(\tfrac{5}{2+3\sqrt{6}}\ell(1+o(1)))\}\end{aligned}$$

が成り立つ。

この定理の上からの不等式は，[9][11]において示されている。下からの不等式も[11]の中でannounceされているが，そこでは上述の定理2が証明抜きで引用されていて，定理2からの導き方だけが述べられている。従って下からの不等式の完全な証明はHattori-Matsumoto[2]においてはじめて公表されたことになる。なおSato-Tate予想を仮定すると，(8)を漸近等式におきかえられるので，当然定理3も改良されることを指摘しておく。

さらに他のゼータ関数に対して，Joyner型不等式を示すことは可能であろうか。上に見たように定理3の証明には，cusp形式についてのかなり深い結果が色々と要求された。従って他の場合にも，深い数論的困難が潜んでいるであろうことは容易に想像がつく。例えば非解析的cusp形式のゼータの場合，Ramanujan-Petersson予想に相当する結果が全く未解決なので，定理2は使えそうもなく，現状ではJoyner型不等式を証明できる見込みは殆んどない。当面は定理1の適用限界を明らかにすることが望まれるが，$\{\gamma_n\}$と$\{P_n\}$の関係を把握するには数論的状況の深い理解が必要となるので，道はなお険しく遠いと言わなければならない。

文　献

[1] H. Bohr und B. Jessen, Über die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion, Erste Mitteilung, Acta Math. 54 (1930) 1–35; Zweite Mitteilung, ibid. 58 (1932) 1–55.

[2] T. Hattori and K. Matsumoto, Large deviations of Montgomery type and its application to the theory of zeta-functions, Acta Arith. 71 (1995) 79–94.

[3] H. Heilbronn, Zeta-functions and L-functions, in "Algebraic Number Theory", J.W.S. Cassels and A. Fröhlich (eds.), Academic Press, 1967, pp. 204–230.

[4] B. Jessen and A. Wintner, Distribution functions and the Riemann zeta function, Trans. Amer. Math. Soc. 38 (1935) 48–88.

[5] D. Joyner, Distribution Theorems of L-functions, Longman Scientific & Technical, 1986.

[6] K. Matsumoto, Euler積をもつゼータ関数の漸近的確率測度, 京大数理研講究録 708 (1989) 63–76.

[7] K. Matsumoto, A probabilistic study on the value-distribution of Dirichlet series attached to certain cusp forms, Nagoya Math. J. 116 (1989) 123–138.

[8] K. Matsumoto, Value-distribution of zeta-functions, in "Analytic Number Theory. Proc. Japanese-French Symposium

held in Tokyo, 1988", K. Nagasaka and E. Fouvry (eds.), Lecture Notes in Math. 1434, Springer, 1990, pp. 178-187.

[9] K. Matsumoto, On the magnitude of asymptotic probability measures of Dedekind zeta-functions and other Euler products, Acta Arith. 60 (1991) 125-147.

[10] K. Matsumoto, Asymptotic probability measures of zeta-functions of algebraic number fields, J. Number Theory 40 (1992) 187-210.

[11] K. Matsumoto, Asymptotic probability measures of Euler products, in "Proc. Amalfi Conference on Analytic Number Theory", E. Bombieri et al. (eds.), Univ. di Salerno, 1992, pp. 295-313.

[12] H.L. Montgomery, The zeta function and prime numbers, in "Proc. Queen's Number Theory Conference, 1979", P. Ribenboim (ed.), Queen's Papers in Pure and Appl. Math. 54, Queen's Univ., Kingston, 1980, pp. 1-31.

[13] M. Ram Murty, Oscillations of Fourier coefficients of modular forms, Math. Ann. 262 (1983) 431-446.

[14] R. A. Rankin, Sums of powers of cusp form coefficients II, Math. Ann. 272 (1985) 593-600.

(1995年11月2日)